

Concursul de Informatică „Future for Future”
Clasa a IX-a
Descrierea soluțiilor

1. Problema Nice Hotel

Propusă de: Andrei-Rareș Tănăsescu, CNMB

1.1 Soluție pentru 30 de puncte

Restricții: $N, F, E, C, K, V_i, T_i \leq 1000$.

Pentru a rezolva problema este nevoie de mai multe observații de natură matematică. Una dintre ele este faptul că profitul maxim nu poate să se obțină pentru un număr de camere mai mare ca numărul maxim de camere rezervate într-o ofertă. Putem, deci, să încercăm să construim orice număr de camere de la 1 la T_{max} și să verificăm pentru fiecare ofertă, dacă se poate valorifica sau nu.

Complexitate timp: $O(N \cdot T_{max})$.

1.2 Soluție pentru 50 de puncte

Restricții: $N, T_i \leq 1000$.

Se procedează ca la soluția precedentă, însă, de data aceasta, pentru a calcula profitul, va fi nevoie de tipul de date `long long`.

1.3 Soluție pentru 70 de puncte

Restricții: $F, E = 0$.

O ofertă „influențează” profitul unui hotel ce are peste T_i camere. Folosindu-ne de observația de la soluția 1, ajungem la concluzia că putem utiliza „șmenul lui Mars” pe un vector ce va tine profitul pentru fiecare hotel cu număr de camere de la 1 la T_i .

Vom adăuga, astfel, V_i la profitul de pe intervalul de camere $[T_i, T_{max}]$. Construirea unui hotel cu X camere va costa $X \cdot C$ lei, număr ce trebuie să fie scăzut din profit pentru fiecare cameră. La final se alege rezultatul aferent primei poziții din vector ce conține profitul maxim.

Complexitate timp: $O(N + T_{max})$.

1.4 Soluție pentru 100 de puncte

Se procedează în același mod precum în soluția precedentă, însă de data aceasta, pentru un hotel cu X camere, costul construirii acestuia va fi de $F + (\lceil \frac{X-1}{K} \rceil + 1) \cdot E + X \cdot C$ lei.

Sursă de 100p: <https://kilonova.ro/submissions/387831>

1.5 Soluție alternativă pentru 100 de puncte

Observăm faptul că profitul maxim se poate obține ori pentru un hotel cu o cameră, ori pentru un hotel cu un număr de camere rezervat de cel puțin o ofertă.

Sortăm ofertele crescător după T_i , iar apoi le parcurgem, reținând suma V -urilor de până acum. Profitul unui hotel al cărui număr de camere este T -ul ofertei curente va fi diferența dintre suma reținută și costul construirii acestuia (calculată ptin formula din soluția precedentă).

Complexitate: timp $O(N \log N)$ și memorie suplimentară $O(1)$, ori timp $O(N)$ și memorie $O(T_{max})$, în funcție de algoritmul de sortare utilizat.

Sursă de 100p: <https://kilonova.ro/submissions/391682>

2. Problema Tri-XOR

Propusă de: Rareș Ștefan Stanciu, ICHC

Subtask 1 (30 puncte)

Verificăm fiecare pereche de numere din intervalul $[A, B]$ și o găsim pe cea cu cel mai mare tri-xor.
Complexitate timp: $O(T \cdot (B - A)^2 \cdot \log_3 B)$

Subtask 2 (40 puncte)

Iterăm prin fiecare număr din interval și încercăm să generăm complementului său optim astfel încât tri-xorul să fie maxim. La verificarea pentru un număr X , se vor parcurge de la stânga la dreapta *trii* săi. La fiecare pas, vom încerca să adăugăm la complement *tritul* cel mai bun pentru operația de tri-xor ($0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0$).

Nu vom reuși întotdeauna să realizăm această variantă, întrucât se poate ca acest număr să depășească intervalul $[A, B]$. Astfel, se va lua în considerare următoarea cea mai bună opțiune. În final, se obțin $B - A + 1$ perechi de forma $(X, \text{complement}(X))$, dintre care va trebui aleasă cea cu tri-xorul cel mai bun.

Complexitate timp: $O(T \cdot (B - A) \cdot \log_3 B)$

Subtask 3 (30 puncte)

Această soluție va construi pe cea precedentă. Pentru fiecare număr, încercăm să îi construim complementul astfel încât acesta să nu depășească marginile intervalului.

Analizăm în continuare *triii* de la stânga la dreapta. Notăm cu a și b *tritul* de pe aceeași poziție i al lui A , respectiv B . Deoarece $A \leq B$, atunci pentru un anume prefix avem $a \leq b$.

- Dacă $a = 0$ și $b = 0$, putem trece peste, deoarece nu este influențat tri-xorul.
- Dacă $a = 0$ și $b = 1$, este optim să alegem două numere cu *tritul* pe această poziție 1. Astfel, la răspuns va trebui să adăugăm $2 \cdot 3^i$. Problema alegerii celorlalți *trii* poate fi redusă la una simetrică celei de la început. Trebuie să găsim două numere, acum din intervalul $[100 \dots 0, B]$, dar cum am fixat deja cei doi *trii* inițiali, la final adăugăm $2 \cdot 3^i$ + soluția pentru $[0, B - 3^i]$.
- Dacă $a = 0$ și $b = 2$, se observă că numărătoarea va trebui să treacă atât prin $022 \dots 2$, cât și prin $200 \dots 0$. Astfel, la răspuns trebuie adăugat $3^{i+1} - 1$ și căutarea poate înceta.

Restul cazurilor rămân plăcerea cititorului de analizat pe cont propriu, însă toate se pot trata în mod analog.

Complexitate timp finală: $O(T \cdot \log_3 B)$

O soluție de 100p se poate găsi aici: www.pastebin.com/wQpPkVvL